

Wybrane modele matematyczne sygnałów

Sygnały harmoniczne

W wielu zagadnieniach mechaniki i fizyki rozważa się wielkości zależne od czasu t wyrażające się wzorem

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \phi). \quad (1)$$

Takie wielkości nazywamy **harmonikami**, a ich zmiany w zależności od czasu t nazywamy **drganiami harmonicznymi**.

Poprzez zmianę fazy harmoniki funkcję sinus można wyrazić za pomocą funkcji cosinus zależnością

$$x_m \cos[(\omega t + \phi) - \frac{\pi}{2}] = x_m \sin(\omega t + \phi), \quad (2)$$

tak więc cosinusoida jest też harmoniką.

Gdy kąt $(\omega t + \phi)$ wzrasta o 2π to sinus jak i cosinus wracają do początkowej wartości. Nastąpi to po czasie który oznaczymy przez T .

W takim razie

$$\omega (t + T) + \phi = \omega t + \phi + 2\pi.$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3)$$

Zatem T jest przedziałem czasu, po którym ruch się powtarza. Nazywamy go okresem ruchu harmonicznego.

Często wprowadza się do wzorów wielkość $f = \frac{1}{T}$ będącą odwrotnością okresu. Nazywamy ją częstotliwością lub częstością drgań. Wskazuje ona, ile okresów mieści się w jednostce czasu, a więc ile razy w jednostce czasu powtarza się ruch. Ponieważ $f = \frac{1}{T}$, zatem wymiar częstotliwości $[f] = [t^{-1}]$ równa się wymiarowi odwrotności czasu. Jeżeli okres $T = 1[s]$ to $f = 1 [1/s]$.

Jednostkę częstotliwości nazwano hercem (skrót Hz). Np. przy okresie $T=1/1000$ [s] częstotliwość $f=1000$ [Hz].

Ze wzoru (3) otrzymujemy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (4)$$

Liczba ω wskazuje, ile drgań odbywa się w 2π sekundach. Wielkość której miarą jest ω nazywamy częstością kołową lub kątową. Wielkość ϕ nazywamy fazą początkową harmoniki. Wartość ϕ wyznacza miejsce harmoniki na osi czasu w odniesieniu do chwili $t = 0$. Miejsce harmoniki na osi czasu w chwili $t = 0$ określa zależność $-\frac{\phi}{\omega}$ [s]. Jednostką kąta fazowego ϕ jest radian [rad].

Wielkość x określa amplitudę harmoniki. W sensie fizycznym harmonika jest funkcją czasu i nazywamy ją **sygnałem**. Sygnał definiuje się jako cechę określonej wielkości fizycznej zawierającą informację. Sygnały są nośnikami informacji ale same jeszcze nie stanowią informacji. Ogólnie, **sygnał** $x(t)$ może być dowolną wielkością fizyczną zmienną w czasie, a natura fizyczna sygnału może być różnorodna np. mechaniczna, elektryczna, elektromagnetyczna, cieplna, optyczna itp. Energia sygnału może ulec wielokrotnemu przekształceniu np. cieplna w optyczną, mechaniczna w elektryczną itp. Zatem, jednostką amplitudy sygnału będzie jednostka wielkości fizycznej którą reprezentuje sygnał np. [m], [rad], [rad/s], [m/s], [m/s²], [rad/s²], [N], lub [Nm]. Wielkości opisujące sygnały, które trzeba pamiętać, gdyż używane są często przy omawianiu rozmaitych drgań to:

x_m - **amplituda** (wartość maksymalna harmoniki) wyrażana w jednostkach

fizycznych które reprezentuje,

$(\omega t + \phi)$ - **faza [rad]**,

ϕ - **faza początkowa [rad]**,

ω - **częstość kołowa lub kątowa [rad/s]**,

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ - **częstotliwość lub częstość [Hz]**,

T - **okres [s]**.

Wzory na przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym możemy napisać w następujący sposób, jeśli przemieszczenie opiszemy zależnością

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \phi) \quad (5)$$

to prędkość ruchu będzie pochodną przemieszczenia względem czasu

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t + \phi) = v_m \sin[(\omega t + \phi) + \frac{\pi}{2}] \quad (6)$$

a przyspieszenie ruchu będzie pochodną prędkości względem czasu i drugą pochodną przemieszczenia względem czasu

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \phi) = a_m \sin[(\omega t + \phi) + \pi] \quad (7)$$

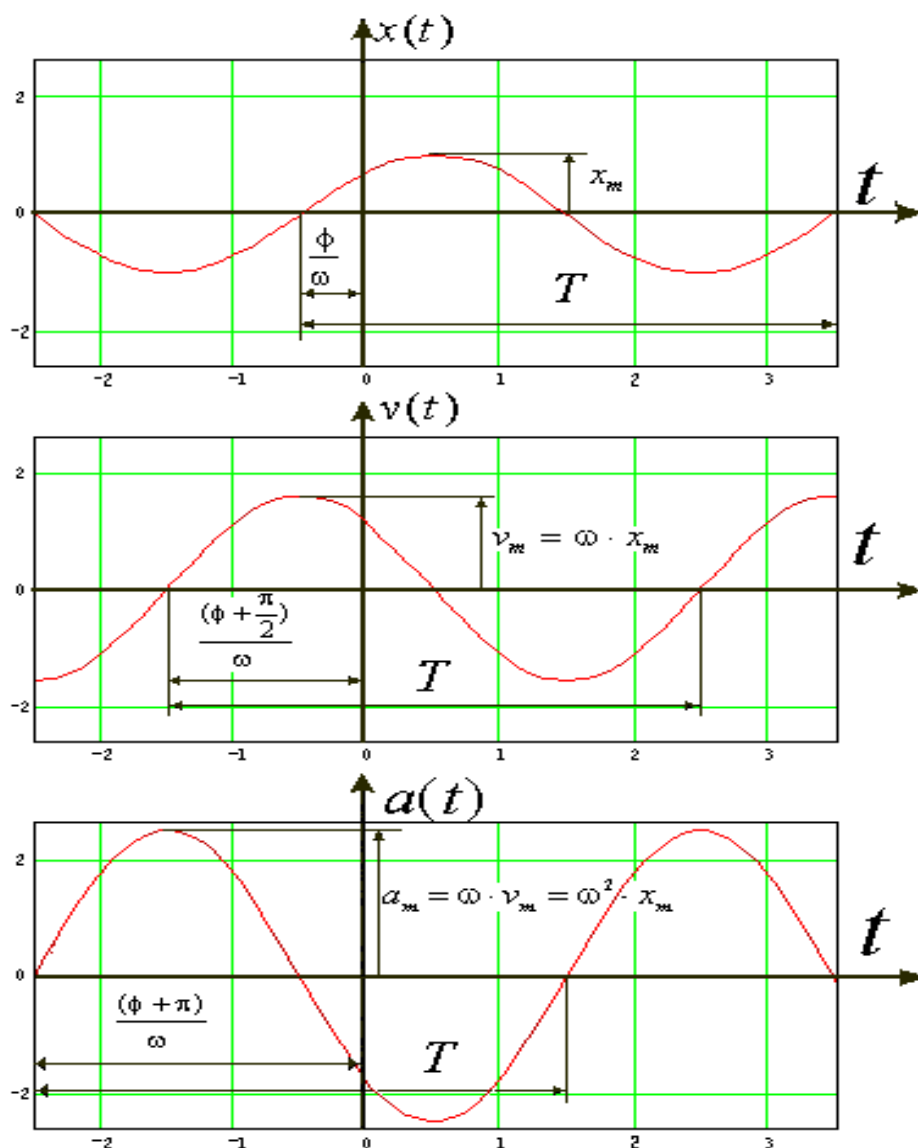
Z powyższych wzorów wynika, że pochodne względem czasu sygnału harmonicznego są również sygnałami harmonicznymi. Każda operacja różniczkowania sygnału zwiększa amplitudę sygnału różniczkowanego ω razy (np. $v_m = \omega x_m$) i przesuwa fazę o $+\frac{\pi}{2}$ (sygnał prędkości ruchu wyprzedza sygnał przemieszczenia ruchu o $\frac{\pi}{2}$). Oznacza to, że amplituda prędkości ruchu harmonicznego zależy od amplitudy przemieszczenia ruchu i od częstotliwości. Operacja całkowania sygnału harmonicznego jest operacją odwrotną do operacji różniczkowania i wygląda następująco;

$$v(t) = \int a_m \sin(\omega t + \phi) dt = -\frac{a_m}{\omega} \cos(\omega t + \phi) = v_m \sin[(\omega t + \phi) - \frac{\pi}{2}] \quad (8)$$

$$x(t) = \iint a_m \sin(\omega t + \phi) dt = -\frac{a_m}{\omega^2} \sin(\omega t + \phi) = x_m \sin[(\omega t + \phi) - \pi] \quad (9)$$

$$x(t) = \int v_m \sin(\omega t + \phi) dt = -\frac{v_m}{\omega} \cos(\omega t + \phi) = x_m \sin[(\omega t + \phi) - \frac{\pi}{2}] \quad (10)$$

Amplituda scałkowanego sygnału harmonicznego jest ω razy mniejsza od sygnału całkowanego a faza opóźniona o $\frac{\pi}{2}$. Interpretację graficzną wyników operacji różniczkowania sygnału harmonicznego oraz niektóre wielkości stosowane w opisie sygnałów harmonicznych przedstawiono na rys.1.



Rys. 1. Sygnał harmoniczny i jego pochodne

Ruchem okresowym lub **periodycznym ustalonym** o okresie T w przedziale czasu (t', t'') nazywamy taki ruch oscylujący, dla którego

$$x(t) = x(t + T) \quad (11)$$

dla każdego $t \in \langle t', t'' \rangle$.

Zauważmy, że w przypadku ruchu periodycznego o okresie T z (6 i 7) wynika również okresowość prędkości i przyspieszenia, co znaczy, że warunki:

$$v(t) = v(t+T), \quad a(t) = a(t+T) \quad (12)$$

również muszą być spełnione dla dowolnej wartości t .

Zbudujmy wektor $\bar{x}$ w przestrzeni dwuwymiarowej x, v o wersorach $\bar{i}, \bar{j}$ rys. (2) następująco

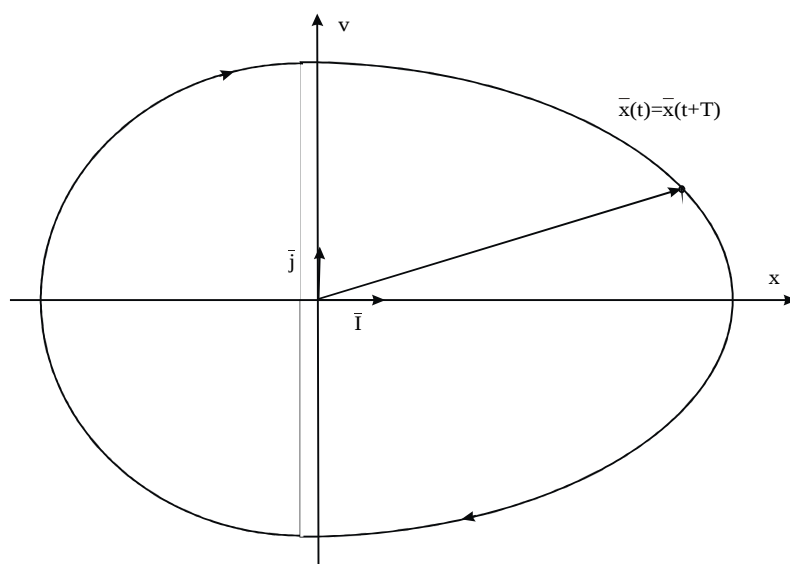
$$\bar{x} = x\bar{i} + v\bar{j} \quad (13)$$

Podstawiając za x funkcję okresową $x(t)$, za v zaś jej pochodną $\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow \dot{x}(t)$ oraz uwzględniając warunki (11) i (12), mamy

$$\bar{x} = \bar{x}(t) = x(t)\bar{i} + \dot{x}(t)\bar{j} = x(t+T)\bar{i} + \dot{x}(t+T)\bar{j} = \bar{x}(t+T) \quad (14)$$

skąd wynika, że obydwa wektory $\bar{x}(t)$ i $\bar{x}(t+T)$ są identyczne.

Zauważmy, że w przedziale czasu $\tau \in (t, t+T)$ ruch wektora $\bar{x}$ jest jednoznacznie określony przez zmienne $x(t)$ i $v(t)$. Natomiast po upływie czasu T od dowolnie przyjętej chwili t wektor $\bar{x}$ wraca do położenia wyjściowego, zakreślając w czasie τ krzywą zamkniętą (pętlę). Jeśli ruch punktu jest okresowy, następna „pętla” będzie pokrywać się z poprzednią.



Rys. 2. Ruch periodyczny opisany wektorową funkcją okresową.

Ruch końca wektora $\bar{x}(t)$ w czasie jednego okresu odbywa się więc po trajektorii zamkniętej rys.(2). Płaszczyznę v, x (gdzie $v = \dot{x}$!) nazywać będziemy **plaszczyzną fazową**.

Ruch punktu $[x(t), v(t)]$ odbywa się po pewnej krzywej, zwanej **trajektorią płaszczyzny fazowej** lub **portretem fazowym** ruchu.

Sygnały harmoniczne. Zapis zespolony

Rozpatrzmy sygnał okresowy opisany funkcją

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \psi) \quad (15)$$

otrzymaną z zależności (1) wprowadzając podstawienie

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

Zbudujmy portret fazowy drgań harmoniczných. Zmienna $v(t)$ w tym przypadku przyjmuje kształt

$$v(t) = \dot{x}(t) = -x_m \omega \sin(\omega t + \psi) \quad (17)$$

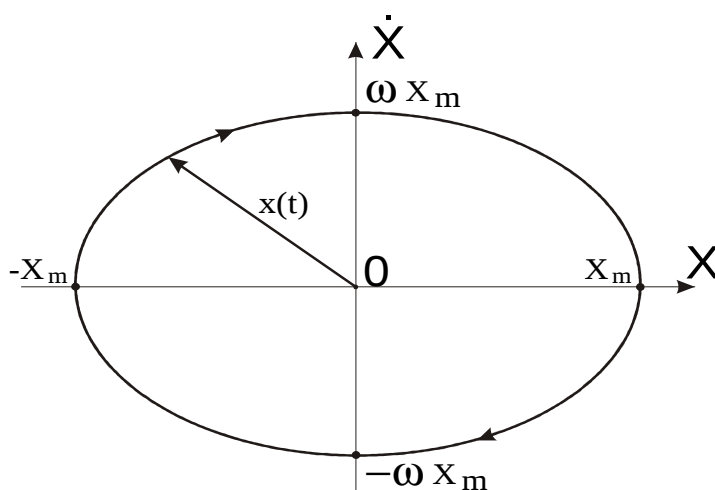
Wektor $\bar{x}$ postaci (13) ma postać

$$\bar{x}(t) = [x_m \cos(\omega t + \psi)]\bar{i} + [-x_m \omega \sin(\omega t + \psi)]\bar{j} \quad (18)$$

Na podstawie (15) i (17) otrzymujemy związek

$$x^2 + \frac{1}{\omega^2} v^2 = x_m^2 \quad (19)$$

który jest równaniem elipsy (rys.3).



Rys. 3. Ruch harmoniczny w opisie wektorowej funkcji okresowej. Portret fazowy sygnału harmonicznego.

Z definicji (15) otrzymujemy

$$x(t) = x_m \cos(\omega t) \cos \psi - x_m \sin(\omega t) \sin \psi = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (20)$$

$$\text{gdzie} \quad a = x_m \cos \psi, \quad b = -x_m \sin \psi \quad (21)$$

Zauważmy, że postacie (1), (15), (20) przedstawiają tę samą funkcję (rys.1) w różny sposób. Postać (1) przedstawia ją za pomocą stałych x_m, ω, φ , postać (15) x_m, ω, ψ , postać (20) zaś – stałych a, b, ω . Związki między każdą trójką tych stałych są jednoznacznie określone wzorami (16), (21).

W wielu przypadkach, głównie dla wygody przekształceń) wygodniej jest sygnał harmoniczny przedstawić w postaci zespolonej. Postać tę można wyprowadzić na podstawie elementarnych wiadomości z teorii liczb zespolonych. Każdą liczbę zespoloną $\underline{z}$ zapisuje się jako sumę jej części rzeczywistej i urojonej, to jest następująco

$$\underline{z} = R\underline{z} + jI\underline{z} \quad (22)$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$ jest tzw. jednostką urojoną. $R\underline{z}, I\underline{z}$ zaś są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, zwanymi

$R\underline{z}$ - część rzeczywista liczby $\underline{z}$,

$I\underline{z}$ - część urojona liczby $\underline{z}$.

Wartości tych liczb jednoznacznie określają liczbę zespoloną. Liczbę $\underline{z}$ można zilustrować na tzw. płaszczyźnie zespolonej (rys. 4).

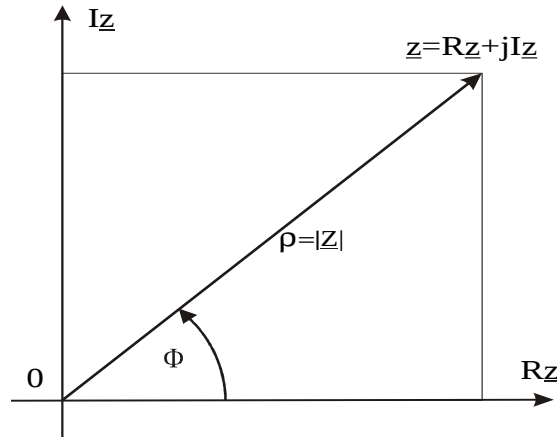
Wprowadzając współrzędne biegunowe ρ i φ (por. rys. 4), liczbę tę można także zapisać w postaci

$$\underline{z} = R\underline{z} + jI\underline{z} = \rho \cos \varphi + j\rho \sin \varphi = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \rho e^{j\varphi} \quad (23)$$

gdzie $\rho = \sqrt{(R\underline{z})^2 + (I\underline{z})^2}$ jest modułem liczby $\underline{z}$ oznaczonym $\underline{z} = \rho$, a $\varphi = \arctg(\frac{I\underline{z}}{R\underline{z}})$ -

argumentem $\underline{z}$ ($\arg \underline{z}$). Dwie liczby zespolone $\underline{z}_1$ i $\underline{z}_2$ są równe, gdy

$$R\underline{z}_1 = R\underline{z}_2, \quad I\underline{z}_1 = I\underline{z}_2, \quad \text{albo} \quad \rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2. \quad (24)$$



Rys. 4. Interpretacja wektorowa liczby zespolonej.

Liczbę zespoloną sprzężoną $\underline{z}^*$ z liczbą $\underline{z}$ nazywamy taką liczbę zespoloną, dla której spełnione są warunki (por. rys. 4)

$$R\underline{z}^* = R\underline{z}, \quad I\underline{z}^* = -I\underline{z} \quad \text{albo} \quad |\underline{z}^*| = |\underline{z}| \quad \arg \underline{z}^* = -\arg \underline{z}. \quad (25)$$

Z powyższych definicji wynika, że **suma dwu dowolnych liczb zespolonych sprzężonych ze sobą jest zawsze liczbą rzeczywistą** równą

$$\underline{z}^* + \underline{z} = R\underline{z} - jI\underline{z} + R\underline{z} + jI\underline{z} = 2R\underline{z} \quad (26)$$

Twierdzenie to jest podstawą rozłożenia funkcji rzeczywistej $x(t)$ na dwie funkcje zespolone wzajemnie sprzężone $\underline{z}(t)$, $\underline{z}^*(t)$.

Założmy, że funkcja $x(t)$ ma postać harmoniczną (15). Funkcję tę zapiszemy w postaci sumy dwu liczb (funkcji) zespolonych $\underline{x}(t); \underline{x}^*(t)$ wzajemnie sprzężonych:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \psi) = \underline{x}(t) + \underline{x}^*(t) \quad (27)$$

Zapisując funkcje zespolone $\underline{x}(t); \underline{x}^*(t)$ w postaci wykładniczej, otrzymamy

$$\underline{x}(t) + \underline{x}^*(t) = \rho(t)e^{j\varphi(t)} + \rho(t)e^{-j\varphi(t)} \quad (28)$$

co wg wzoru Eulera (zależność $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$) daje

$$\underline{x}(t) + \underline{x}^*(t) = 2\rho(t) \cos \varphi(t) \quad (29)$$

Z porównania związków (27) i (29) otrzymujemy:

$$\rho(t) = \frac{x_m}{2} = \text{const} \quad \varphi(t) = \omega t + \psi$$

skąd:

$$\underline{x}(t) = \frac{X_m}{2} e^{j(\omega t + \psi)} \quad \underline{x}^*(t) = \frac{X_m}{2} e^{-j(\omega t + \psi)} \quad (30)$$

Korzystając z wyników (30) funkcję harmoniczną (27) można zapisać w postaci

$$x(t) = \underline{x}(t) + \underline{x}^*(t) = \frac{X_m}{2} e^{j(\omega t + \psi)} + \frac{X_m}{2} e^{-j(\omega t + \psi)} = \left(\frac{X_m}{2} e^{j\psi}\right) e^{j\omega t} + \left(\frac{X_m}{2} e^{-j\psi}\right) e^{-j\omega t}$$

skąd można zapisać
$$x(t) = \underline{X} e^{j\omega t} + \underline{X}^* e^{-j\omega t} \quad (31)$$

gdzie przez $\underline{X}$ oznaczono tzw. amplitudę zespoloną równą

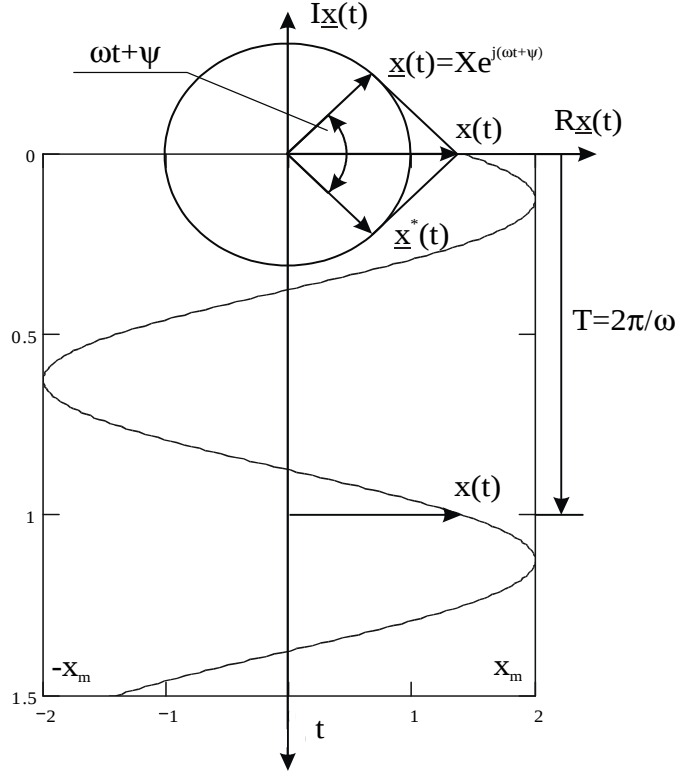
$$\underline{X} = \frac{X_m}{2} e^{j\psi} \quad \underline{X}^* = \frac{X_m}{2} e^{-j\psi} \quad (32)$$

Na rys. (5) przedstawiono ilustrację graficzną zapisu zespolonego (31) funkcji harmoniczej (27), przy czym przez X oznaczono moduł amplitudy $\underline{X}$, tj.

$$X = |\underline{X}| = \frac{X_m}{2} \quad (33)$$

Funkcję rzeczywistą $x(t)$, w tym wypadku traktuje się jako długość „wektora” będącego sumą dwu „wektorów” $\underline{x}(t)$ i $\underline{x}^*(t)$ o jednakowych stałych modułach X (por. rys. 5) .

„Wektory” te, obracają się w przeciwnych kierunkach ze stałą prędkością kątową ω , powodują, że „wektor” wypadkowy opisujący ruch $x(t)$ pozostaje zawsze na osi rzeczywistej, a jego długość zmienia się harmonicznie zgodnie z postacią (27) (rys. 5). Bazę wielkości określających jednoznacznie ruch harmoniczny tworzą, w tym przypadku, częstość kołowa ω oraz dwie wielkości zespolone sprzężone $\underline{X}$ i $\underline{X}^*$. Posługiwanie się w analizie drgań zapisem zespolonym jest bardzo często wygodniejsze niż stosowanie tradycyjnego zapisu w postaci funkcji trygonometrycznych (1), (15), (20). Znacznemu uproszczeniu ulegają odpowiednie przekształcenia analityczne.



Rys. 5. Graficzna interpretacja postaci zespolonej drgań harmoniczych.

Rozpatrzmy dla przykładu sumę dwóch dowolnych drgań harmoniczych $x_1(t)$ i $x_2(t)$. Dla wygody będziemy korzystać z postaci zespolonej tych drgań, przy czym zanalizujemy jeden z wektorów sprzężonych pamiętając, że drugi zachowuje się analogicznie. Wyrażając sumę drgań $x_s(t) = x_1(t) + x_2(t)$ w postaci

$$x_s(t) = x(t) + x^*(t) = X_s e^{j\psi} + X_s e^{-j\psi} = A_s \cos \psi \quad (34)$$

gdzie

$$A_s = 2X_s \quad (35)$$

możemy napisać:

$$X_s e^{j\psi} = X_1 e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + X_2 e^{j(\omega_2 t + \varphi_2)} \quad (36)$$

$$X_s e^{-j\psi} = X_1 e^{-j(\omega_1 t + \varphi_1)} + X_2 e^{-j(\omega_2 t + \varphi_2)} \quad (37)$$

Mnożąc stronami tożsamości (36) i (37), otrzymujemy

$$\begin{aligned} X_s^2 &= X_1^2 + X_2^2 + X_1 X_2 e^{j(\Delta\omega t + \Delta\varphi)} + X_1 X_2 e^{-j(\Delta\omega t + \Delta\varphi)} = \\ &= X_1^2 + X_2^2 + 2X_1 X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi), \end{aligned} \quad (38)$$

gdzie

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Uwzględniając oznaczenie (35) otrzymujemy wzór określający amplitudę A_s drgań wypadkowych $x_s(t)$ w postaci

$$A_s = 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)} \quad (39)$$

Następnie, rozkładając jedną z liczb (36) lub (37) na część rzeczywistą i urojoną, otrzymamy wzór określający fazę ψ . Z na przykład (36) uzyskamy:

$$\begin{aligned} X_s e^{j\psi} &= X_1[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + j \sin(\omega_1 t + \varphi_1)] + X_2[\cos(\omega_2 t + \varphi_1) + j \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] = \\ &= X_1[\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] + j\{X_1[\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)]\} \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$\psi = \arctg \frac{I \underline{x}(t)}{R \underline{x}(t)} = \arctg \frac{X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}{X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)} \quad (40)$$

Zależności (39) i (40) jednoznacznie opisują ruch wypadkowy $x_s(t)$. Amplituda A_s tego ruchu ulega okresowym zmianom o wartości $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ i przyjmuje wartości w przedziale

$A_s \in (A_{s\min}, A_{s\max})$ (por. rys. 6), gdzie

$$A_{s\min} = 2 |X_1 - X_2| = |A_1 - A_2| \quad (41)$$

$$A_{s\max} = 2 |X_1 + X_2| = A_1 + A_2 \quad (42)$$

Wyrażenie (40) jest dość skomplikowane. Rozpatrzmy więc dwa prostsze przypadki.

Przypadek 1)

$$X_1 = X_2 = X \quad \varphi_1 \neq \varphi_2 \quad (43)$$

Po podstawieniu wyrażenia (43) do wzoru (39) otrzymamy:

$$A_s = 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)} = |4X \cos(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\varphi}{2})|. \quad (44)$$

Z zależności (44) wynika, że ruch amplitudy drgań wypadkowych jest ruchem periodycznym o okresie $T = 2\pi / \Delta\omega$. Wzór (40) będzie w tym przypadku miał następującą postać:

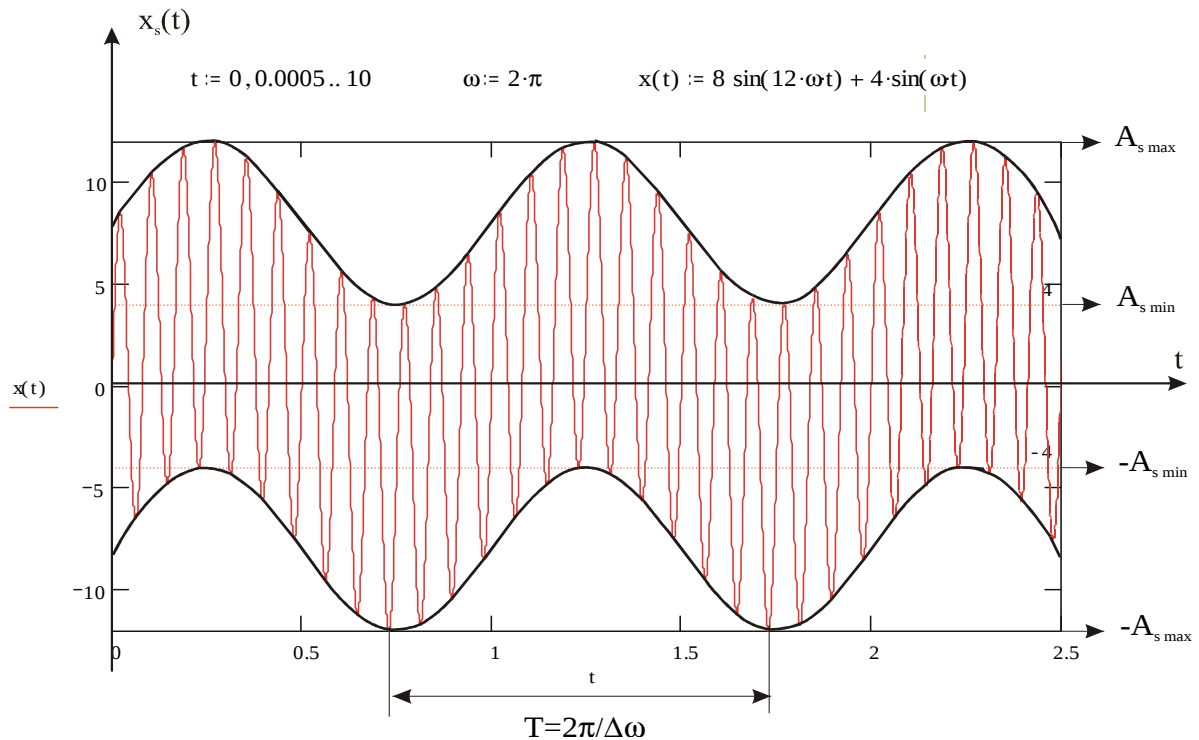
$$\tg \psi = \frac{\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \sin(\omega_2 t + \varphi_2)}{\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

Oznaczając $\alpha = \omega_1 t + \varphi_1$, $\beta = \omega_2 t + \varphi_2$, mamy dalej:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$$

skąd otrzymujemy wzór określający fazę ψ

$$\psi = \frac{(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad (45)$$



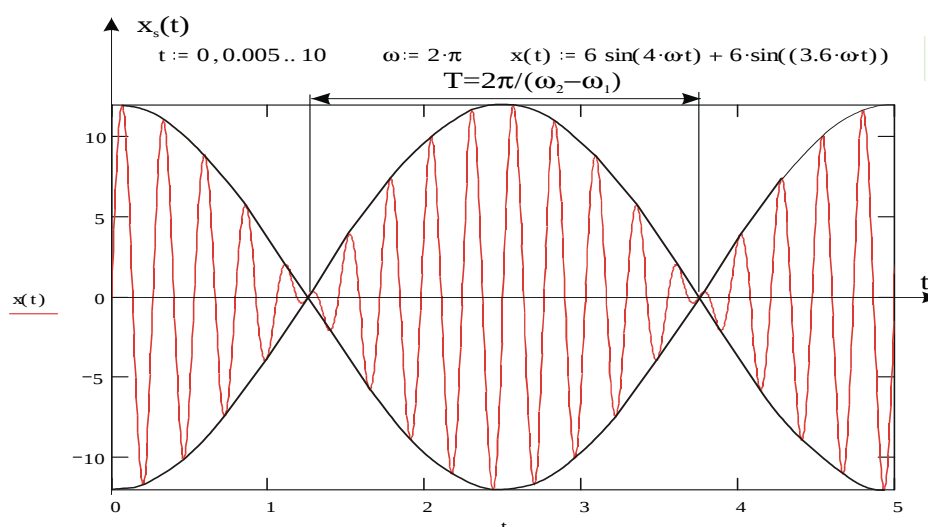
Rys. 6. Przebieg funkcji $x_s(t) = x_1(t) + x_2(t)$ sumy dwóch składowych harmonicznnych o różnych częstościach, amplitudach i zgodnych fazach początkowych.

Podstawiając zależności (44) i (45) do (34), otrzymamy równanie ruchu dla tego przypadku drgań w postaci:

$$x_s(t) = |4X \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})| \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}) \quad (46)$$

Równanie to określa drgania punktu dla przypadku 1), rys (7). Widać, że na falę nośną o częstości $(\omega_2 + \omega_1)/2$ nakłada się fala o częstości $(\omega_2 - \omega_1)/2$.

Drgania o tej postaci tworzą tzw. falę modulowaną amplitudowo. W przypadku, gdy częstotliwości drgań różnią się nieznacznie i znajdują się w zakresie częstotliwości słyszalnej dla człowieka, drgania te wywołują charakterystyczne, często spotykane **zjawisko dudnienia**.



Rys. 7. Przykład funkcji okresowej opisującej drgania dla przypadku równych amplitud i nieznacznie różnych częstotliwości składowych sumy dwóch drgań.

Ilustracja zjawiska dudnienia.

Przypadek 2)

$$X_1 \neq X_2 \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \quad (47)$$

W tym przypadku na podstawie (44) mamy:

$$A_s = 2(X_1 + X_2) = A_1 + A_2 \quad (48)$$

a więc stałą amplitudę równą sumie amplitud drgań składowych. Podstawiając warunki (47) do (40), otrzymujemy wzór określający fazę:

$$\psi = \omega t + \varphi$$

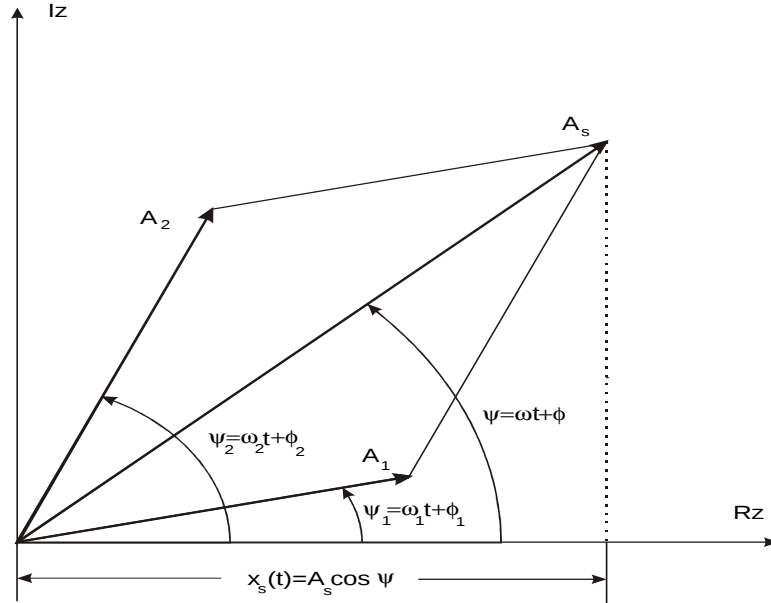
i funkcja opisująca ruch jest zwykłą cosinusoidą o postaci

$$x_s(t) = (A_1 + A_2) \cos(\omega t + \varphi). \quad (49)$$

Rozważania analityczne, dotyczące sumowania drgań harmoniczných, można zastąpić rozważaniami geometrycznymi, jeśli przedstawi się każdą z harmonik

$x_i = x_{m_i} \cos(\omega_i t + \phi_i)$ sumy $x_s = \sum_{i=1}^n x_i$ w postaci wektora o module x_m i nachyleniu $(\omega_s t + \phi_s)$.

Z sumy dwóch wektorów (rys. 8) wynika wzór (44) określający amplitudę A_s .



Rys. 8. Geometryczna interpretacja sumy dwóch drgań harmoniczných o jednakowych częstościach.

Operacja różniczkowania i całkowania sygnału harmonicznego w postaci zespolonej wygląda następująco;

$$v(t) = \frac{d}{dt} x_m e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega x_m e^{j(\omega t + \phi)} = v_m e^{j[(\omega t + \phi) + \frac{\pi}{2}]} \quad (50)$$

$$\bar{x}(t) = \int v_m e^{j(\omega t + \phi)} dt = \frac{v_m}{j\omega} e^{j(\omega t + \phi)} = -j \frac{v_m}{\omega} e^{j(\omega t + \phi)} = x_m e^{j[(\omega t + \phi) - \frac{\pi}{2}]} \quad (51)$$

gdzie:

$$\frac{1}{j} = -j, \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad 1 = e^{j \cdot 0}, \quad -1 = e^{j \cdot \pi}.$$

Energia drgania w ruchu harmonicznym.

Gdy punkt materialny przytrzymywany w położeniu równowagi siłami sprężystymi zaczyna drgać, jego energia składa się z energii potencjalnej i kinetycznej. Energia potencjalna występuje dzięki istnieniu sił wewnętrznych, energia kinetyczna – ponieważ punkt porusza się z pewną prędkością. Aby obliczyć całkowitą energię układu, należałoby obliczyć energię potencjalną, jaką punkt ma w danej chwili, następnie energię kinetyczną i dodać je. Ponieważ siła działająca na punkt zmienia się podczas wychylania, trzeba by w tym przypadku użyć rachunku całkowego. Uprościmy sobie to zagadnienie korzystając z faktu, że są takie chwile, gdy układ ma tylko energię kinetyczną, to znaczy jego całkowita energia równa się energii kinetycznej. Zachodzi to w chwilach, gdy punkt drgający przechodzi przez położenie równowagi, a więc jego wychylenie równa się zeru. Ze wzoru na wychylenie

$$x(t) = x_m \sin(\omega t) \quad (52)$$

widać, że to następuje w chwilach, gdy $\sin(\omega t) = 0$, a więc gdy

$$\omega t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$$

Prędkość ruchu drgającego

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t) \quad (53)$$

W wyżej wymienionych chwilach $v = \pm A\omega$, ponieważ $\cos n\pi = \pm 1$.

Energia kinetyczna

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \quad (54)$$

Ponieważ całkowita energia w wymienionych chwilach równa się energii kinetycznej,

możemy więc napisać

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{4\pi^2mA^2f^2}{2} \quad (55)$$

Z tego wzoru widać, że energia punktu drgającego jest proporcjonalna do masy tego punktu, do kwadratu amplitudy jego wychylenia i kwadratu częstości drgań.

Sygnały poliharmoniczne

Sygnałami poliharmonicznymi nazywamy takie typy sygnałów okresowych, które powtarzają dokładnie swoje wartości w jednakowych przedziałach czasowych i opisane są zależnościami

$$x(t) = x(t + nT_p) \quad (56)$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$

Tak jak w przypadku sygnału harmonicznego, przedział czasu, w ciągu którego zachodzi jedno pełne drganie (pełny cykl), nazywa się okresem T_p .

Sygnały poliharmoniczne, z nielicznymi wyjątkami, można rozwinąć w **szereg Fouriera**. Ponieważ szereg Fourier jest funkcją okresową **to możemy zapisać go zgodnie z czterema różnymi sposobami zapisów funkcji harmonicznego** (por. wzory (1), (15), (20), (31)) następującym wzorem

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2X_k \cos(k\omega_1 t + \psi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2X_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} [\underline{X}_k e^{jk\omega_1 t} + \underline{X}_k^* e^{-jk\omega_1 t}], \end{aligned} \quad (57)$$

gdzie dla $k=0$ można przyjąć

$$2X_0 \cos \psi_0 = a_0 = 2X_0 \sin \varphi_0 = X_0 + X_0^* = x_0 \quad (58)$$

Funkcje spełniające warunki, zwane warunkami ortogonalności umożliwiają proste wyznaczenie wzorów wyrażających stałe współczynniki a_k, b_k o postaci:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos k \omega_1 t dt, \quad (k = 1, 2, 3 \dots),$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin(k \omega_1 t) dt, \quad (k = 1, 2, 3 \dots) \quad (59)$$

Jak wynika ze wzoru (57), sygnały poliharmoniczne składają się ze składowej stałej x_0 i nieskończonej liczby składowych sinusoidalnych, nazywanych **harmonicznymi**, o amplitudach x_k i fazach początkowych ϕ_k . Częstotliwości wszystkich harmonicznymi stanowią całkowite wielokrotności **częstotliwości podstawowej** $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_p}$. Wzór na okres podstawowy T_p można wyrazić zależnością

$$T_1 n_1 = T_2 n_2 = \dots = T_k n_k = T_p \quad (60)$$

gdzie $n_1, n_2, \dots, n_k$ są liczbami naturalnymi.

Przykładem sygnału poliharmonicznego może być sygnał opisany funkcją $y(t) = \omega t$ dla $0 < \omega t < 2\pi$ (rys. 9). Jak widać na rys. 9, dokładność odwzorowania funkcji zależy od liczby składowych harmonicznymi szeregu Fouriera aproksymującego sygnał. Zakładając stałą dokładność aproksymacji sygnału za pomocą szeregu Fouriera zauważymy, że dla różnych postaci sygnału wymagana jest inna liczba składowych harmonicznymi. Sygnały o szybkich zmianach wartości, zwłaszcza takie, które posiadają punkty nieciągłości w formie ostrych załamania i „pików”, potrzebują do odwzorowania dużej liczby harmonik. O takich sygnałach mówi się, że posiadają szeroką charakterystykę widmową lub mają „szerokie widmo”. W przypadkach przebiegów okresowych załamania takie są wyrazem istnienia składowych o wysokich częstotliwościach. Sygnały o łagodnym przebiegu lub o „zaokrąglonych kształtach” zawierają stosunkowo niewielką liczbę harmonik i nazywa się je sygnałami o szybkozbieżnej charakterystyce widmowej lub sygnałami o „wąskim widmie”.

W innych przypadkach, może nie istnieć składowa o częstotliwości podstawowej ω_1 . Załóżmy na przykład (rys. 10), że sygnał okresowy powstał w wyniku superpozycji trzech sygnałów harmonicznymi o częstotliwościach odpowiednio 6, 7.5, 10 [Hz]. Największy wspólny dzielnik tych liczb równy jest 0.5 [Hz], a więc okres wynikowego sygnału

okresowego $T_p = 2$ [s]. Po rozwinięciu w szereg Fouriera wartości amplitud x_k będą równe zero dla wszystkich n oprócz $n = 12, n = 15, n = 20$.

Zjawiska fizyczne, którym odpowiadają sygnały poliharmoniczne, występują znacznie częściej niż zjawiska opisywane za pomocą zwykłej funkcji harmonicznej. Zaliczając dany sygnał do grupy sygnałów harmonicznych dokonuje się na ogół pewnego przybliżenia, ponieważ rozpatrywany sygnał jest -ściśle biorąc- sygnałem poliharmonicznym. W pewnych przypadkach mogą istnieć w fizycznym sygnale okresowym składowe harmoniczne nawet o stosunkowo dużych amplitudach. Przykładem mogą być wibracje wielocylindrowego silnika tłokowego, które wykazują przeważnie silnie uwydatnione składowe harmoniczne.

Najczęściej używanymi wartościami, które służą do oznaczania poliharmonicznych sygnałów okresowych są:

wartość szczytowa x_p - największa wartość sygnału mierzona od położenia zerowego,

wartość międzyszczytowa x_{pp} - różnica między wartością maksymalną a minimalną,

wartość średnia określona wzorem $x_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt$ (61)

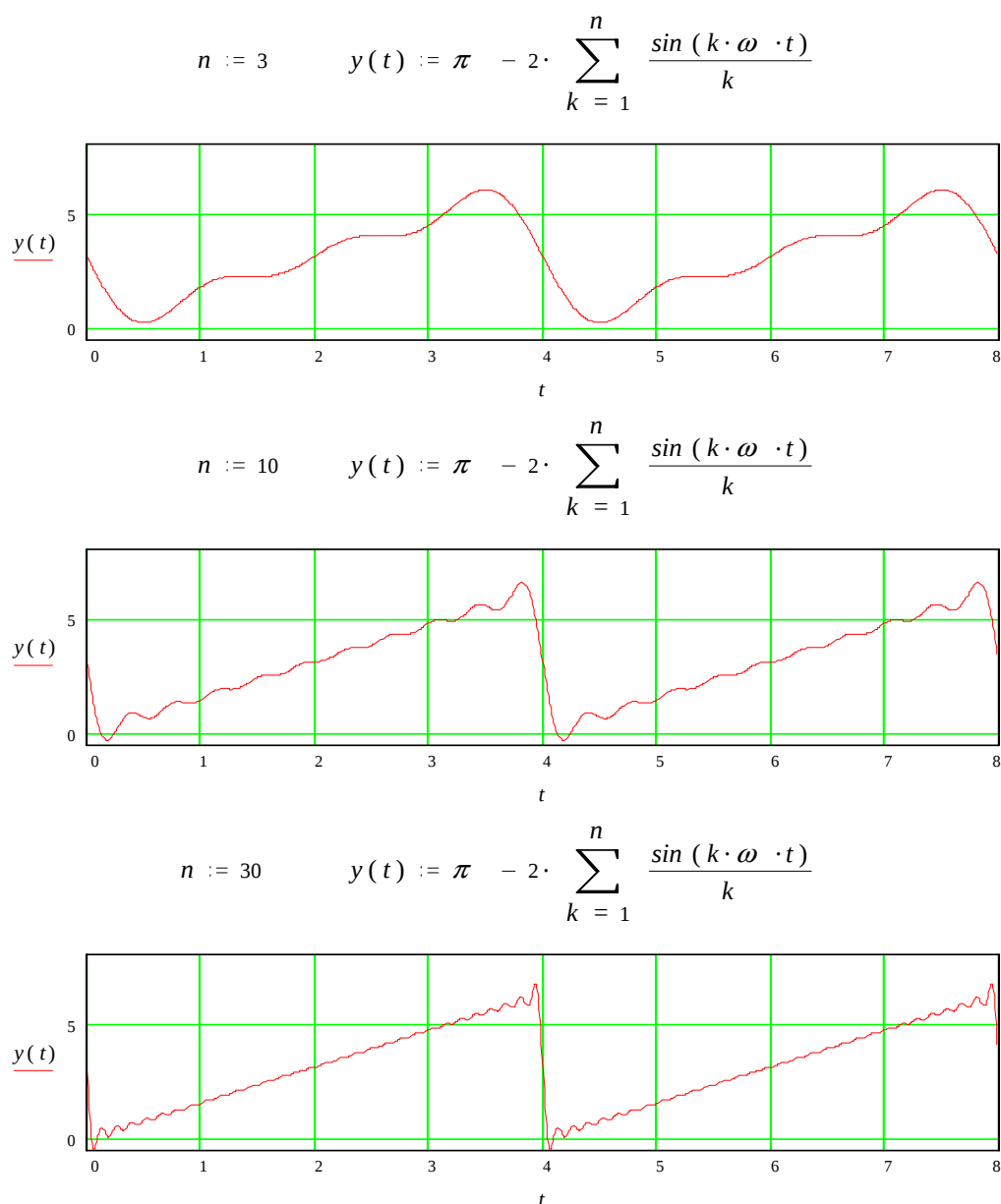
wartość skuteczna określona wzorem $x_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$ (62)

Dla sygnału harmonicznego wartość średnia $x_{sr} = \frac{2}{\pi} * x_m$ a wartość skuteczna $x_{sk} = \frac{1}{\sqrt{2}} * x_m$.

Uwaga: Większość popularnych przyrządów do pomiarów amplitudy sygnału, takich jak woltomierze i amperomierze, mierzy wartość średnią z wartości bezwzględnej sygnału chodź wyskalowane są w wartościach skutecznych. Pomiar wartości skutecznej sygnału takimi przyrządami jest poprawny tylko dla sygnałów harmonicznych gdzie stosunek

$\frac{x_{sk}}{x_{sr}} \cong 1,1 = const$. Dla poliharmonicznych sygnałów okresowych stosunek wartości skutecznej

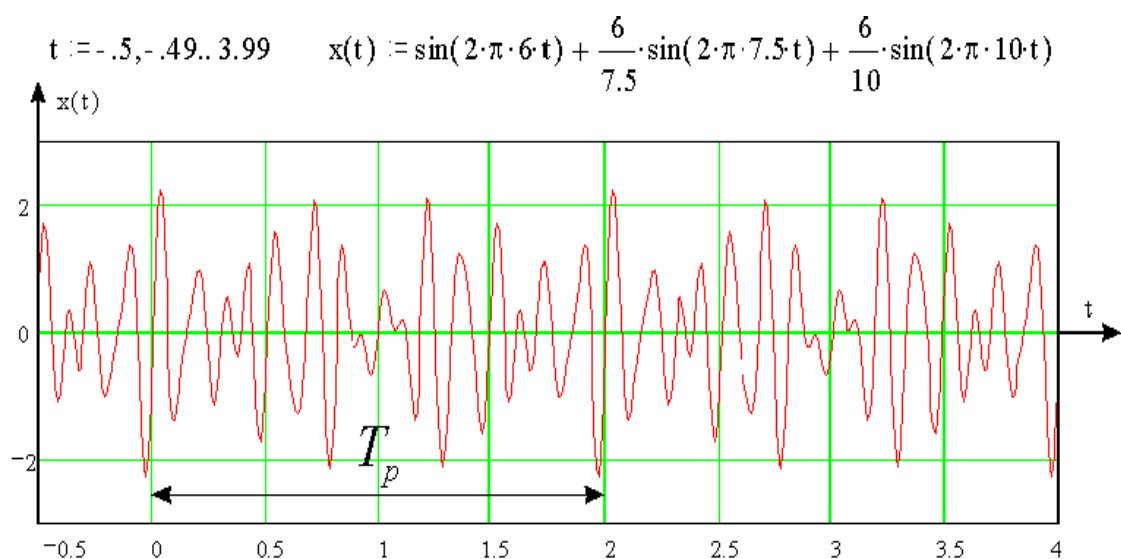
do wartości średniej nie jest stały i zależy od postaci sygnału. Zaleca się, w miarę możliwości unikanie posługiwaniem się wartością średnią sygnału jako estymatorem jednopunktowym bardziej obciążonym.



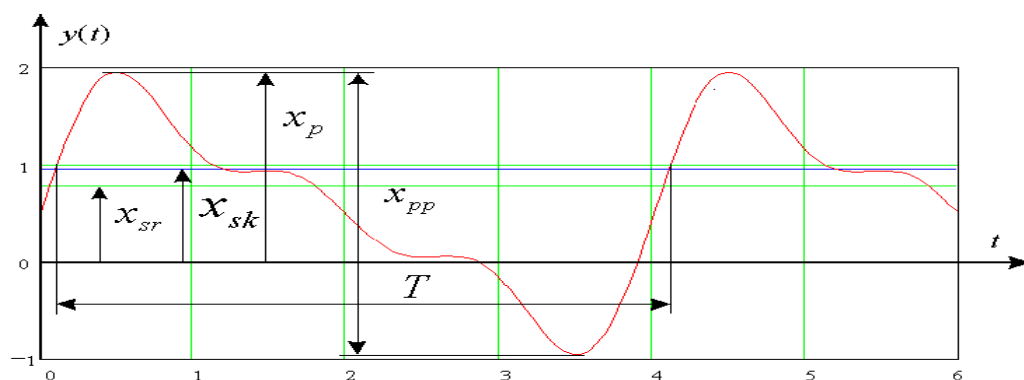
Rys. 9. Przykład odwzorowanie funkcji $y(t) = \omega t$ przy pomocy różnej liczby wyrazów szeregu Fouriera

Jak wspomniano wcześniej, sygnały okresowe można uzyskać sumując fale sinusoidalne o współmiernych częstotliwościach. Jednak sygnały, które powstały w wyniku sumowania fal sinusoidalnych o dowolnych częstotliwościach, nie są na ogół sygnałami okresowymi.

Mówiąc dokładniej, suma dwóch lub więcej fal sinusoidalnych tworzy sygnał okresowy tylko w tym przypadku, gdy stosunki wszystkich możliwych par częstotliwości wyrażają się liczbami wymiernymi. Oznacza to, że istnieje pewien podstawowy okres T_p spełniający warunek określony wzorem (60).



Rys. 10. Przykład funkcji nie zawierającej częstotliwości podstawowej ω_1 .



Rys. 11. Przykład graficznej prezentacji najczęściej stosowanych wartości opisujących sygnały poliharmoniczne

Natomiast sygnał

$$x(t) = x_1 \sin(1t + \phi_1) + x_2 \sin(\sqrt{2}t + \phi_2) + x_3 \sin(\sqrt{5}t + \phi_3) \quad (63)$$

nie jest sygnałem okresowym, ponieważ liczby zawarte w stosunkach częstotliwości składowych $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, są niewymierne (okres podstawowy T_p jest równy nieskończoności). W takim przypadku sygnały takie nazywamy prawie okresowymi lub pseudookresowymi,

gdyż warunek (60) nie jest spełniony dla jakiejkolwiek skończonej wartości T_p . W praktyce pomiarowej i obliczeniowej liczby niewymierne podajemy z pewnym zaokrągleniem

dziesiętnym. Jeżeli np. przyjmujemy, że $T_1 = 2\pi \approx 6.3$, $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \approx 4.4$, $T_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \approx 2.8$,

to uwzględniając wzór (60) otrzymamy, że wspomniany sygnał jest sygnałem okresowym o okresie $T_p = 6.3 \cdot 308 = 4.4 \cdot 441 = 2.8 \cdot 693 = 1940.4[s]$. Oczywiście jest, że im mniejsze przyjmujemy zaokrąglenia dziesiętne tym większe otrzymamy wartości okresu T_p . W zasadzie, wszystkie sygnały złożone z sumy sygnałów harmonicznym możemy traktować jako sygnały okresowe o odpowiednio długim okresie. Niemniej, podział sygnałów na okresowe i pseudookresowe lepiej jest zachować i sygnały okresowe nie posiadające składowej będącej częstotliwością podstawową ω_l powinno się traktować jak sygnały pseudookresowe.

Krzywe Lissajous

Dotychczas sumowaliśmy składowe harmoniczne wzdłuż jednej osi czasu t . Często postrzegamy punkty drgającego ciała poruszające się po torach przestrzennych lub płaskich. Taki ruch punktów drgającego ciała sprowadza się do geometrycznego sumowania składowych harmonicznym w przestrzeni lub na płaszczyźnie. Wzory opisujące ruch punktu są parametryczną formą równania toru punktu o współrzędnych $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, gdzie czas t jest parametrem. W przypadku sumowania sygnałów w układzie współrzędnych ortogonalnym (na kierunkach prostopadłych do siebie) otrzymamy:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=1}^{n_x} x_{m_k} \sin(\omega_{x_k} t + \phi_{x_k}) \\ y(t) &= \sum_{k=1}^{n_y} y_{m_k} \sin(\omega_{y_k} t + \phi_{y_k}) \\ z(t) &= \sum_{k=1}^{n_z} z_{m_k} \sin(\omega_{z_k} t + \phi_{z_k}) \end{aligned} \quad (64)$$

gdzie: n_x, n_y, n_z - liczby składowych harmonicznym w kierunkach osi x, y, z ;

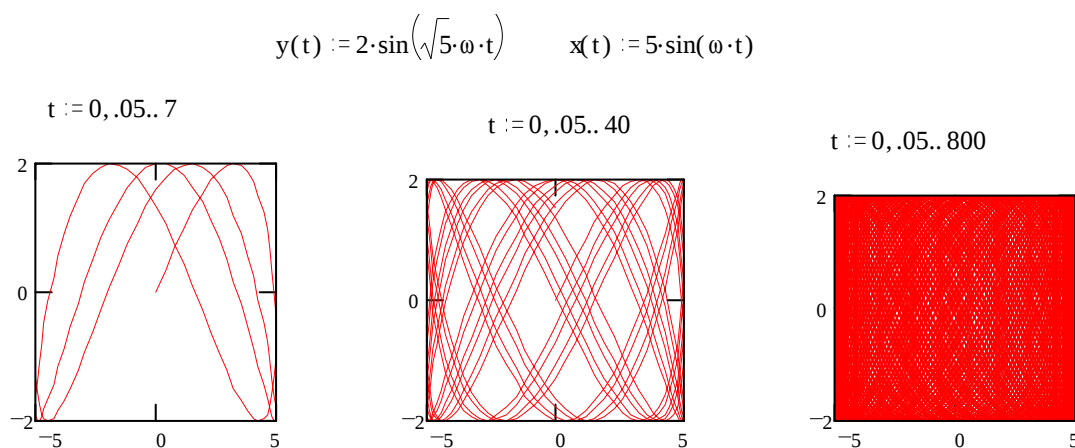
$x_{m_k}, y_{m_k}, z_{m_k}$ -amplitudy składowych w kierunkach osi x, y, z ;

$\phi_{x_k}, \phi_{y_k}, \phi_{z_k}$ - fazy początkowe składowych w kierunkach osi x, y, z ;

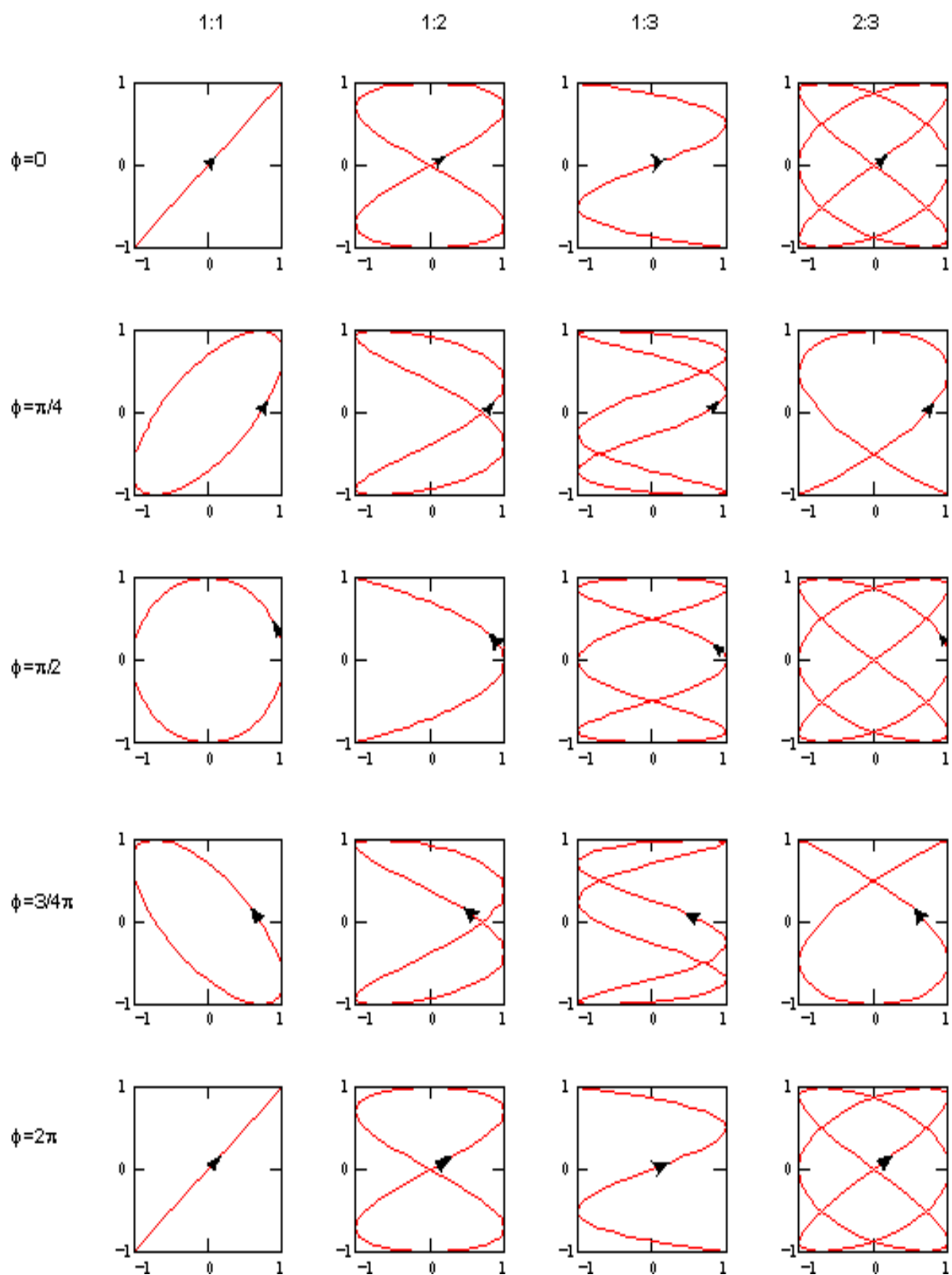
$\omega_{x_k}, \omega_{y_k}, \omega_{z_k}$ - częstości kołowe składowych w kierunkach osi x, y, z .

Otrzymane na podstawie równań (64) tory nazywamy **krzywymi Lissajous** lub **figurami Lissajous**. Obserwacje krzywych Lissajous stanowią wygodną metodę badania postaci drgań. W przypadkach gdy stosunki częstości składowych sygnałów są liczbami wymiernymi, tory ruchu punktów są krzywymi zamkniętymi (por. rys. 13). Oznacza to, że ruchu punktu w przestrzeni lub na płaszczyźnie odbywa się po tym samym torze w chwili gdy parametr jakim jest czas $t = T_p$. Inaczej mówiąc, dla wartości czasu $t \geq T_p$ postać krzywej Lissajous nie ulegnie zmianie. Tor ruchu punktu będący wynikiem sumowania składowych o okresach wyrażonych liczbami niewymiernymi będzie krzywą otwartą. Jest to tor punktu charakterystyczny dla ruchu pseudookresowego (prawie okresowego). Dla wartości czasu $t \rightarrow \infty$ tor krzywej Lissajous może przebiegać przez wszystkie punkty przestrzeni ograniczone wielkościami $x_{m_k}, y_{m_k}, z_{m_k}$ (por. rys. 12).

Podsumowując, cecha sygnału jaką jest okresowość albo pseudookresowość widoczna jest nie tylko w dziedzinie czasu ale także w kształcie torów przestrzennych drgającego punktu (figur Lissajous).



Rys. 12. Figury Lissajous, na płaszczyźnie, przy różnych czasach obserwacji dla składowych, których stosunek częstości nie jest liczbą wymierną .



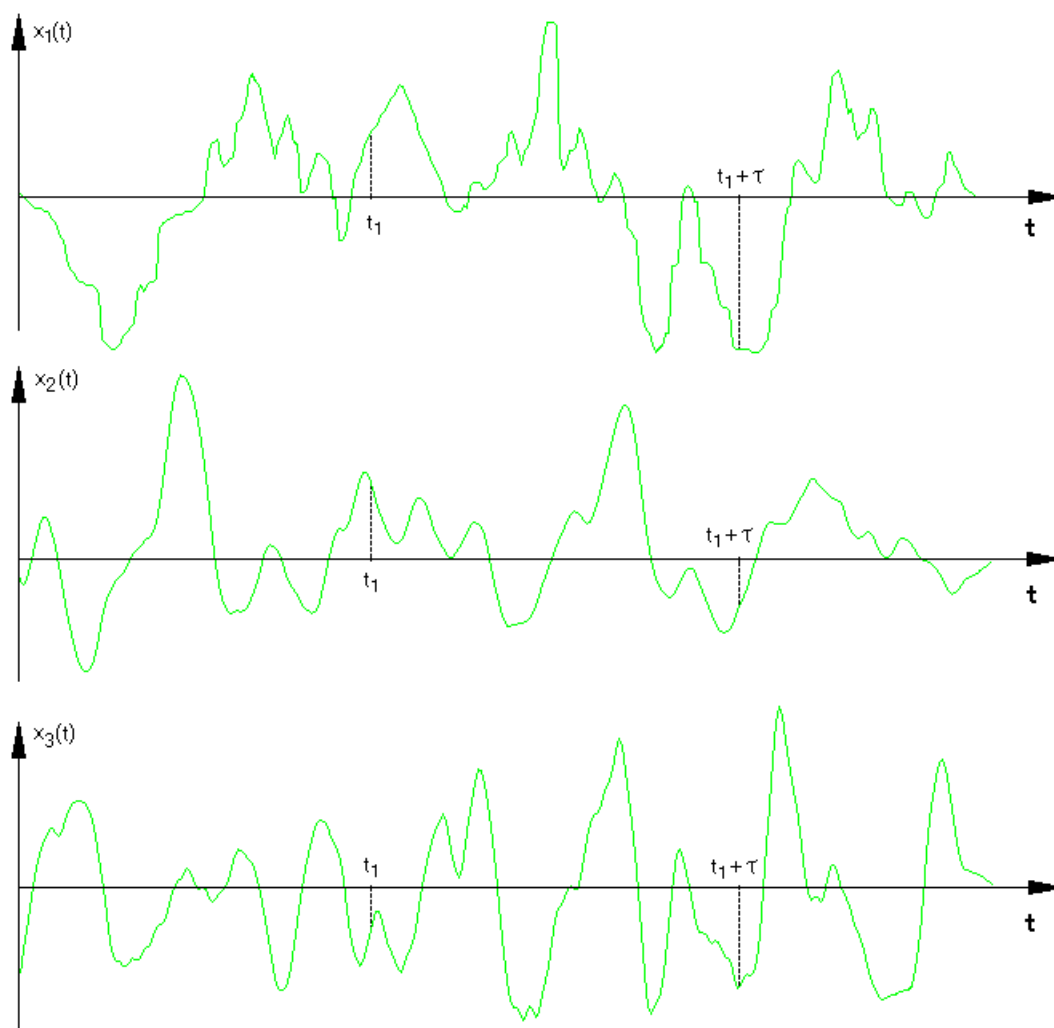
Rys. 13. Figury Lissajous dla ruchu harmonicznego przy różnych stosunkach częstotliwości i różnych fazach drgań składowych.

Sygnały stochastyczne oraz ich charakterystyki.

Sygnałem stochastycznym jest nazywany sygnał, którego wartości dla każdej chwili są zmiennymi przypadkowymi. Obserwując taki sygnał w danym układzie dynamicznym, uzyskuje się pewien konkretny przebieg, zwany **realizacją procesu stochastycznego**. Zbiór wszystkich realizacji takiego przebiegu jest nazywany **procesem stochastycznym**. Proces stochastyczny nazywa się **stacjonarnym**, jeśli jego własności statystyczne nie zależą od czasu. Dla większości procesów stacjonarnych obowiązuje tzw. twierdzenie ergodyczne, według którego uśrednianie wartości sygnału względem różnych realizacji można zastąpić uśrednianiem względem czasu.

Stacjonarne procesy losowe.

Z punktu widzenia teorii procesów losowych zjawisko fizyczne można opisać w dowolnej chwili, obliczając wartości średnie w zbiorze funkcji losowych, reprezentujących dany proces. Rozpatrzmy zbiór funkcji losowych tworzących proces losowy przedstawiony na rys. .



Wartość średnią (pierwszy moment) procesu losowego w pewnej chwili t_1 można wyznaczyć za pomocą sumowania wartości chwilowych każdej funkcji losowej zbioru w chwili t_1 i podzielenia tej sumy przez liczbę funkcji losowych. W analogiczny sposób korelację (moment łączny zmiennej losowej) między wartościami procesu losowego w dwóch różnych chwilach (zwaną **funkcją autokorelacji**) wyznacza się metodą uśrednienia w zbiorze iloczynów wartości chwilowych procesu w chwilach t_1 i $t_1 + \tau$. Inaczej mówiąc, wartość średnią $\mu_x(t_1)$ i funkcję autokorelacji $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ procesu losowego $\{x(t)\}$ wyznacza się z zależności

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (65)$$

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau) \quad (66)$$

przy czym sumując zakłada się, że wystąpienie każdej funkcji losowej jest jednakowo prawdopodobne.

W ogólnym przypadku, gdy wartości funkcji $\mu_x(t_1)$ i $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ określone równaniami (65, 66) zmieniają się wraz ze zmianą czasu, proces losowy $\{x(t)\}$ nazywa się **niestacjonarnym**. W szczególnym przypadku, gdy $\mu_x(t_1)$ i $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ nie zależą od czasu t_1 , proces losowy $\{x(t)\}$ nazywa się **słabo stacjonarnym** lub **stacjonarnym w szerszym sensie**. Wartość średnia słabo stacjonarnych procesów jest stała, a funkcja autokorelacji zależy tylko od przesunięcia τ , tj. $\mu_x(t_1) = \mu_x$ i $R_x(t_1, t_1 + \tau) = R_x(\tau)$.

Dla procesu losowego $\{x(t)\}$ można obliczyć nieskończony zbiór momentów wyższych rzędów i momentów łącznych; ich pełny zbiór opisuje rozkład probabilistyczny procesu. Gdy wszystkie możliwe momenty oraz momenty łączne nie zależą od czasu, proces $\{x(t)\}$ nazywa się **ściśle stacjonarnym** lub **stacjonarnym w węższym sensie**. Dla wielu praktycznych przykładów stwierdzenie słabej stacjonarności procesu usprawiedliwia przyjęcie wniosku o ścisłej stacjonarności.

Ergodyczne procesy losowe

W większości przypadków można opisywać właściwości stacjonarnego procesu losowego metodą uśredniania w czasie poszczególnych funkcji losowych zbioru. Rozpatrzmy na przykład k -tą funkcję losową procesu losowego, przedstawionego na rys. . Średnią wartość $\mu_x(k)$ i funkcję autokorelacji $R_x(\tau, k)$ k -tej funkcji losowej określa się następującymi wyrażeniami:

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt \quad 67$$

$$R_x(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt \quad 68$$

Jeżeli proces losowy $x(t)$ jest stacjonarny i wartości $\mu_x(k)$ i $R_x(\tau, k)$ określone wzorami (67), (68) są jednakowe dla różnych funkcji losowych, to taki proces losowy nazywa się **ergodyczny**. Dla ergodycznego procesu losowego wartość średnia i funkcja autokorelacji (jak również i inne momenty, uzyskane przez uśrednienie w czasie) równają się odpowiednim średnim w zbiorze, a więc $\mu_x(k) = \mu_x$ i $R_x(\tau, k) = R_x(\tau)$. Należy zauważyć, że tylko procesy stacjonarne mogą wykazywać cechę ergodyczności (rozważa się także dla procesów niestacjonarnych ergodyczność względem danego momentu).

Ergodyczne procesy losowe stanowią, oczywiście, ważną klasę procesów losowych, ponieważ wszystkie właściwości losowych procesów ergodycznych mogą być określone przez uśrednienie w czasie jednej funkcji losowej (sygnału obserwowanego). Na szczęście w praktyce procesy losowe odpowiadające stacjonarnym zjawiskom fizycznym są na ogół ergodyczne.

Z tego też względu w większości przypadków można prawidłowo wyznaczyć charakterystyki stacjonarnego procesu losowego na podstawie jednej realizacji.

Niestacjonarne procesy losowe

Do procesów niestacjonarnych zalicza się wszystkie procesy losowe, które nie spełniają wymagań dotyczących stacjonarności wyliczonych we wzorach 65, 66. O ile nie wprowadzono specjalnych ograniczeń, to charakterystyki niestacjonarnego procesu losowego są funkcjami czasu, które można określić tylko przez uśrednienie wartości chwilowych w zbiorze funkcji losowych tworzących ten proces. W praktyce nie można na ogół uzyskać dostatecznie dużej

liczby realizacji, niezbędnej dla dokładnego pomiaru charakterystyk przez uśrednienie w zbiorze.

Okoliczność ta utrudnia rozwój praktycznych metod pomiaru i analizy niestacjonarnych procesów losowych.

W wielu przypadkach można jednak wydzielić w klasie niestacjonarnych procesów losowych, odpowiadających realnym zjawiskom fizycznym specjalne kategorie niestacjonarności, co upraszcza zadanie pomiaru i analizy. Na przykład niektóre zjawiska o charakterze losowym mogą być opisane niestacjonarnym procesem losowym $\{y(t)\}$, którego każda funkcja losowa ma postać $y(t)=A(t)x(t)$, gdzie $x(t)$ jest funkcją losową stacjonarnego procesu losowego $\{x(t)\}$, a $A(t)$ jest zdeterminowanym mnożnikiem. Innymi słowami, taki proces zalicza się do niestacjonarnych procesów losowych, których funkcje losowe cechują się wspólnym zdeterminowanym trendem czasowym. Jeżeli niestacjonarny proces odpowiada konkretnemu modelowi takiego typu, to do jego opisu nie trzeba dokonywać uśredniania w zbiorze. Różne wymagane charakterystyki procesu można niekiedy ocenić na podstawie jednej funkcji losowej, jak to ma miejsce dla procesów ergodycznych.

Stacjonarne sygnały obserwowane

Rozpatrywane wcześniej pojęcie stacjonarności, związane jest z uśrednieniem w zbiorze charakterystyk procesu losowego. W praktyce często mówi się o stacjonarności lub niestacjonarności jednego sygnału obserwowanego procesu losowego. Stosuje się tu nieco odmienne pojęcie stacjonarności. Gdy mówi się o stacjonarności jednej realizacji, to oznacza, że charakterystyki wyznaczone dla krótkich przedziałów czasu następujących po sobie nie zmieniają się znacznie. Wyrażenie „znacznie” oznacza, że zaobserwowane zmiany są większe niż można by tego oczekiwać, uwzględniając typową statystyczną zmienność losową.

Dla wyjaśnienia tego zagadnienia rozpatrzmy pojedynczy sygnał obserwowany $x(t)$ k-tej funkcji losowej procesu losowego $\{x(t)\}$. Załóżmy, że wartość średnią i funkcję autokorelacji uzyskuje się przez uśrednianie w czasie w krótkim przedziale o długości trwania T w chwili początkowej t_1 :

$$\mu_x(t_1, k) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x_k(t) dt \quad 69$$

$$R_x(t_1 + \tau, k) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x_k(t) x_k(t + \tau) dt \quad 70$$

W ogólnym przypadku, gdy charakterystyki losowe określone wzorami (69), (70) zmieniają się znacznie przy zmianie chwili początkowej t_1 , sygnał obserwowany uważa się za niestacjonarny. W przypadku, gdy charakterystyki te nie zmieniają się znacznie przy zmianie t_1 , sygnał obserwowany uważa się za stacjonarny.

Należy zaznaczyć, że odcinek realizacji ergodycznego procesu losowego jest stacjonarny. Jeżeli założenie o ergodyczności jest uzasadnione (jak to ma miejsce dla większości realnych stacjonarnych zjawisk fizycznych), to stwierdzenie stacjonarności jednego sygnału obserwowanego może stanowić dostateczne uzasadnienie dla założenia stacjonarności i ergodyczności procesu losowego, do którego należy dany sygnał obserwowany.

Główne charakterystyki sygnałów losowych

Do opisu głównych właściwości sygnałów losowych stosuje się cztery funkcje statystyczne:

- 1) wartość średniokwadratową,
- 2) funkcję gęstości prawdopodobieństwa,
- 3) funkcję autokorelacji,
- 4) funkcję widmowej gęstości mocy.

Wartość średniokwadratowa daje elementarne pojęcie o intensywności procesu.

Gęstość prawdopodobieństwa charakteryzuje właściwości procesu w dziedzinie wartości amplitud. Funkcja autokorelacji i funkcja gęstości widmowej mocy dają podobną informację o procesie w dziedzinie odpowiednio czasowej i częstotliwościowej. Pod względem formalnym funkcja autokorelacji procesu stacjonarnego nie zawiera dodatkowej informacji w porównaniu z funkcją widmowej gęstości mocy, gdyż związane one są ze sobą wzajemnie jednoznacznym przekształceniem Fouriera.

Omówimy w sposób ogólny wymienione charakterystyki stacjonarnych procesów losowych. Zakładamy przy tym, że procesy te wykazują cechy ergodyczności, a więc dane charakterystyki można wyznaczyć metodą uśredniania w czasie poszczególnych funkcji losowych.

Wartości średnie i wariancja

Elementarne pojęcie o intensywności dowolnego sygnału losowego daje **wartość średniokwadratowa**, która jest wartością średnią kwadratu danego sygnału. Wartość średniokwadratową Ψ_x^2 danego sygnału $x(t)$ określa się zgodnie ze wzorem:

$$\Psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt. \quad 71$$

Często stosuje się pojęcie wartości bezwzględnej pierwiastka kwadratowego z wartości średniokwadratowej, zwanej **wartością skuteczną**.

Nieraz wygodnie jest rozpatrywać sygnał fizyczny w postaci sumy **składowej statycznej**, tzn. niezależnej od czasu, i **składowej dynamicznej** lub **fluktuacyjnej**. Składową statyczną można opisać przez wartość średnią, która jest po prostu wartością średnią funkcji obserwowanej. Wartość średnia określana jest wzorem

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad 72$$

Składową dynamiczną można opisać przez **wariancję** sygnału, która równa jest średniemu kwadratowi odchylenia jego wartości od wartości średniej, czyli

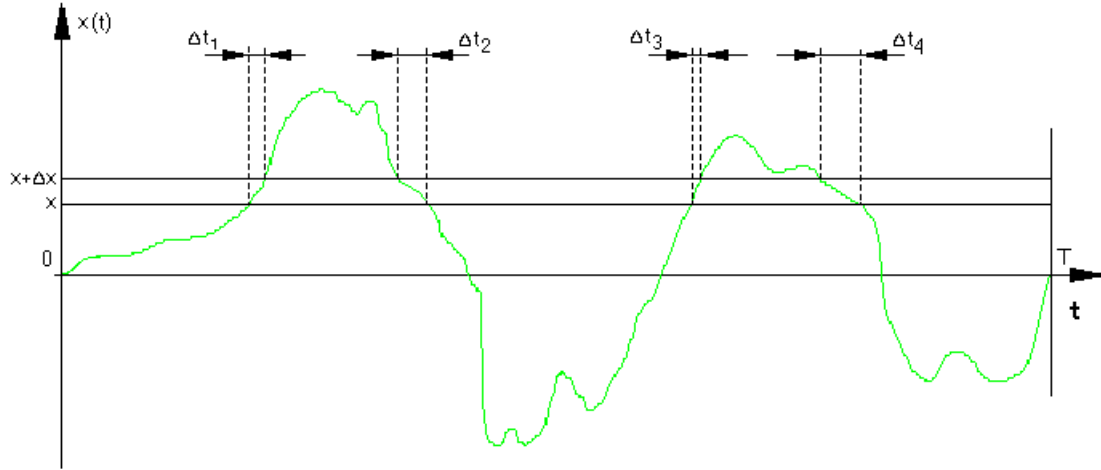
$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad 73$$

Wartość bezwzględna pierwiastka kwadratowego z wariancji nazywa się **odchyleniem standardowym**. Otwierając nawiasy w funkcji podcałkowej (73) można stwierdzić, że wariancja równa jest różnicy między wartością średniokwadratową i kwadratem wartości średniej, czyli

$$\sigma_x^2 = \Psi_x^2 - \mu_x^2 \quad 74$$

Gęstość prawdopodobieństwa

Funkcję gęstości prawdopodobieństwa sygnału losowego określają prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wartości sygnału w dowolnej chwili są zawarte w określonym przedziale. Rozpatrzmy pewną realizację jako funkcję czasu $x(t)$, przedstawioną na rysunku ().



Prawdopodobieństwo tego, że wartość funkcji $x(t)$ przypadają na przedział od x do $x + \Delta x$, można znaleźć wyznaczając stosunek $\frac{T_x}{T}$, gdzie T_x oznacza sumę przedziałów czasu, w których wartości sygnału znajdują się w przedziale $(x, x + \Delta x)$ w czasie trwania obserwacji T . Przy dążeniu T do nieskończoności stosunek ten coraz dokładniej opisuje prawdopodobieństwo takiego zdarzenia. Można to zapisać w następujący sposób:

$$\Pr[x < x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \quad 75$$

Przy dostatecznie małych wartościach Δx **gęstość prawdopodobieństwa $p(x)$** można określić następującym przybliżonym związkiem:

$$\Pr[x < x(t) \leq x + \Delta x] \approx p(x) \Delta x$$

lub ściślej

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Pr[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T}] \quad 76$$

Gęstość prawdopodobieństwa jest zawsze funkcją rzeczywistą nieujemną.